## Exercice 1 :

1) $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\Omega$ et $\forall (x,y) \in \Omega$ ;

- $f'_x(x,y) = \cos x - \sin(x+y)$
- $f'_y(x,y) = \cos y - \sin(x+y)$
- $f''_{xx}(x,y) = -\sin x - \cos(x+y)$
- $f''_{yy}(x,y) = -\sin y - \cos(x+y)$
- $f''_{xy}(x,y) = -\cos(x+y) = f''_{yx}(x,y)$

2) Les points critiques de $f$ sont les solutions du système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin(x+y) = 0 & (1) \\ \cos y - \sin(x+y) = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow \cos x = \cos y$

$\Rightarrow x = y$ (car $x$ et $y \in ]0;\pi[$)

Donc
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \cos x - \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = x \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} \\ y = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

En conclusion, $f$ admet sur $\Omega$ 3 points critiques qui sont :

$A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ et $C\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$

(ces trois points $\in$ 1ère bissectrice)

3) $\forall (x,y) \in \Omega$

$$D(x,y) = \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2 - \left[f''_{xx}(x,y)\right]\cdot\left[f''_{yy}(x,y)\right]$$

■ Etude du point $A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ :

* $f''_{xy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\pi = 1$

* $f''_{xx}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0$

* $f''_{yy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0$

$\Rightarrow D\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = [1]^2 - [0] = 1 > 0$

$\Rightarrow f$ admet un point de selle en $A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

■ Etude du point $B\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ :

* $f''_{xy}\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

* $f''_{xx}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = -1$

* $f''_{yy}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} D\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right) = \left[-\frac{1}{2}\right]^2 - [1] = -\frac{3}{4} < 0 \\ f''_{xx}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ admet un maximum local en $B\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ de valeur $f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

■ **Etude du point $C\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ :**

* $f''_{xy}\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

* $f''_{xx}\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3} = -1$

* $f''_{yy}\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3} = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} D\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right) = \left[-\frac{1}{2}\right]^2 - [1] = -\frac{3}{4} < 0 \\ f''_{xx}\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f$ admet un maximum local en $C\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ de valeur $f\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$

## Exercice 2 :

1) $\vec{F}(t) = (x(t);\ y(t))$

■ **Domaine de définition de $\vec{F}$ :**

$D_{\vec{F}} = ]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$

■ **Limites aux bornes de $D_{\vec{F}}$ et branches infinies :**

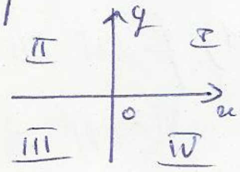
$\boxed{\text{en } -\infty}$

- $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} t^2+2t-3 = \lim\limits_{t\to-\infty} t^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} t+\frac{1}{t} = -\infty$

- $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t+\frac{1}{t}}{t^2+2t-3} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t}{t^2} = 0^-$

$\therefore$ La courbe $(C)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction $/\!/$ à $(Ox)$.
(Cette branche $\subset$ quadrant IV)




$\boxed{\text{en } 0^-}$

- $\lim\limits_{t\to0^-} x(t) = \lim\limits_{0^-} t^2+2t-3 = -3$

- $\lim\limits_{t\to0^-} y(t) = \lim\limits_{0^-} t+\frac{1}{t} = -\infty$

$\therefore$ $(C)$ admet en $0^-$ la droite $x=-3$ comme asymptote verticale.

$\boxed{\text{en } 0^+}$

- $\lim\limits_{t\to0^+} x(t) = \lim\limits_{0^+} t^2+2t-3 = -3$

- $\lim\limits_{t\to0^+} y(t) = \lim\limits_{0^+} t+\frac{1}{t} = +\infty$

$\therefore$ la droite $x=-3$ est aussi asymptote verticale à $(C)$ en $0^+$

$\boxed{\text{en } +\infty}$

- $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty$

- $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{+\infty} \frac{t}{t^2} = 0^+$

$\therefore$ $(C)$ admet en $+\infty$ une Branche Parabolique de direction $/\!/$ à $(Ox)$
(Cette branche $\subset$ quadrant I)

2) $\forall t \in \mathcal{D}_{\vec{F}} = \mathbb{R}^*$

$\begin{cases} \cdot\ x'(t) = 2t+2 \\ \cdot\ y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \end{cases}$

$\begin{cases} \cdot\ x''(t) = 2 \\ \cdot\ y''(t) = \frac{2}{t^3} \end{cases}$

$\begin{cases} \cdot\ x'''(t) = 0 \\ \cdot\ y'''(t) = \frac{-6}{t^4} \end{cases}$

3) ■ Point de rebroussement :

Les points critiques de (C) sont donnés par : $\begin{cases} x'(t)=0 \\ y'(t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+2=0 \\ 1-\frac{1}{t^2}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ t=-1$

* $\vec{F}(-1) = (x(-1); y(-1)) = (-4; -2)$ : coordonnés du point $M(t=-1)$

* $\vec{F}'(-1) = (x'(-1); y'(-1)) = (0;0) = \vec{0}$

* $\vec{F}''(-1) = (2; -2) \neq \vec{0} \longrightarrow \boxed{p=2}$

* $\vec{F}'''(-1) = (0; -6)$ non colinéaire à $\vec{F}''(-1)$

$\longrightarrow \boxed{q=3}$

∴ La courbe (C) admet en $M(t=-1)$ de coordonnés $(-4; -2)$, un point de rebroussement de première espèce.

* Tangente en $M(t=-1)$ :
  - vecteur tangent : $\vec{F}''(-1) = (2; -2)$
  - pente : $p = \frac{-2}{2} = -1$
  - équation : $y = -(x+4) - 2$
    $= -x - 6$

■ Point d'inflexion :

Les points d'inflexion de (C) sont des points $M(t)$ vérifiant la condition $\det(\vec{F}'(t); \vec{F}''(t)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2t+2 & 2 \\ 1-\frac{1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{t^3}(2t+2) - 2\left(1-\frac{1}{t^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4(t+1)}{t^3} - \frac{2}{t^2}(t^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{t^2}(t+1)\left[\frac{2}{t} - (t-1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow\ t+1=0$ ou $2 - t(t-1) = 0$

$\Leftrightarrow\ t=-1$ ou $-t^2+t+2=0$

$\Leftrightarrow\ t=-1$ ou $t=2$

* $\forall t \in \mathcal{D}_{\vec{F}} - \{-1; 2\}$, $M(t)$ est un point birégulier (à allure normale)

* On a déjà vu que le point $M(t=-1)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

* Etudions le point $M(t=2)$ :

  - $\vec{F}(2) = (x(2); y(2)) = (5; \frac{5}{2})$ :
    → coordonnés de $M(t=2)$

  - $\vec{F}'(2) = (x'(2); y'(2)) = (6; \frac{3}{4}) \neq \vec{0}$
    ↳ $\boxed{p=1}$

  - $\vec{F}''(2) = (x''(2); y''(2)) = (2; \frac{1}{4})$
    $\vec{F}''(2)$ colinéaire à $\vec{F}'(2)$

  - $\vec{F}'''(2) = (x'''(2); y'''(2)) = (0; \frac{-6}{16})$
    $\vec{F}'''(2)$ non colinéaire à $\vec{F}'(2)$
    ↳ $\boxed{q=3}$

∴ le point $M(t=2)$, de coordonnées $(5\,;\,\frac{5}{2})$ est un point d'inflexion de la courbe $(C)$. C'est le seul.

* Tangent en $M(t=2)$ : (non demandé)

. vecteur tangent : $\vec{F}'(2)=(6\,;\,\frac{3}{4})$

. pente : $p=\frac{3/4}{6}=\frac{1}{8}$

. équation : $y=\frac{1}{8}(x-5)+\frac{5}{2}$
$=\frac{1}{8}x+\frac{15}{8}$

4) Variations :

$\forall t\in D_{\vec{F}}=\mathbb{R}^*$ $\begin{cases} x'(t)=2t+2=2(t+1) \\ y'(t)=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2} \end{cases}$

. $x'(t)=0 \Leftrightarrow t=-1$
. $y'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$
. $x'(t)>0 \Leftrightarrow t>-1$
. $y'(t)>0 \Leftrightarrow t<-1$ ou $t>1$

D'où le tableau de variations suivant:

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | $+\infty$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $-3$ ‖ $-3$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

5) intersection avec les axes :

* avec $(Ox)$ : $y(t)=0$
$\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=0$
$\Leftrightarrow t^2+1=0$ : impossible

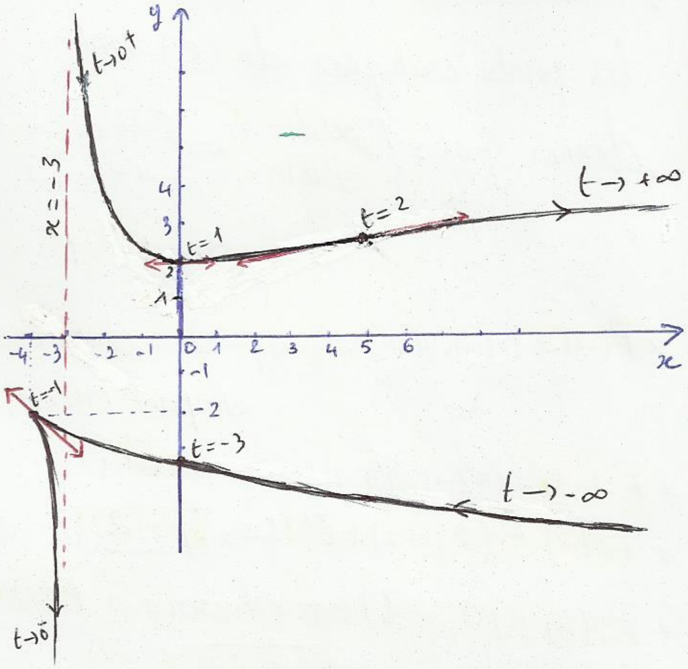
donc $(C)$ ne coupe pas $(Ox)$

* avec $(Oy)$ : $x(t)=0$
$\Leftrightarrow t^2+2t-3=0$
$\Leftrightarrow t=1$ ou $t=-3$

$\begin{cases} \text{Pour } t=1 \rightarrow y(1)=2 \\ \text{Pour } t=-3 \rightarrow y(-3)=-10/3 \end{cases}$

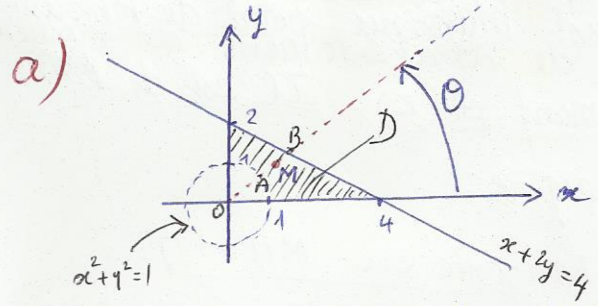
Donc $(C)$ coupe $(Oy)$ en deux points qui sont:

. $M(t=1)$ de coordonnées $(0\,;\,2)$
. $M(t=-3)$ de coordonnées $(0\,;\,\frac{-10}{3})$




Exercice 3 :

a)




Passons aux coordonnées polaires
$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

Sur D: $\begin{cases} \cdot\ \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2} \\ \cdot \text{ Pour } \theta \text{ fixé, } r \text{ varie de } OA \text{ à } OB \end{cases}$

* $OA = 1$ (= rayon du cercle)

* $OB = ?$

le long de la droite $x + 2y = 4$

on a : $r\cos\theta + 2r\sin\theta = 4$

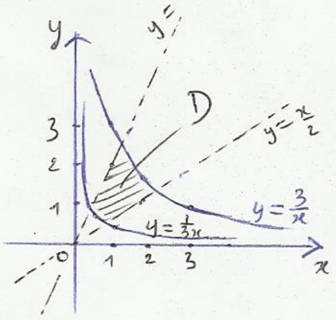
$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{4}{\cos\theta + 2\sin\theta}$$

donc $OB = \dfrac{4}{\cos\theta + 2\sin\theta}$

Ainsi
$$I = \iint_D (x^2+y^2)^{-3/2}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^{\frac{4}{\cos\theta+2\sin\theta}} (r^2)^{-3/2} \cdot r\,dr \right) d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^{\frac{4}{\cos\theta+2\sin\theta}} r^{-2}\,dr \right) d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\left[\frac{1}{r}\right]_1^{\frac{4}{\cos\theta+2\sin\theta}} \right) d\theta$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{4} - 1 \right) d\theta$$
$$= -\left[ \frac{1}{4}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta - \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}}$$

b)

Posons $\begin{cases} u = y/x \\ v = xy \end{cases}$




* Jacobien :

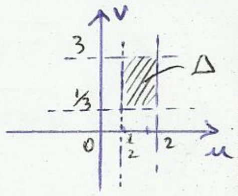
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$$
$$= -2\frac{y}{x} = -2u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2u}$$

* Nouveau domaine $\Delta$ de $(u,v)$ :

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} < y < 2x \\ \frac{1}{3x} < y < \frac{3}{x} \end{cases} \quad \text{avec } x>0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2 \\ \frac{1}{3} < xy < 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < u < 2 \\ \frac{1}{3} < v < 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (u,v) \in \Delta$$

où $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{1}{2} < u < 2 ; \frac{1}{3} < v < 3\}$




Donc
$$J = \iint_D dx\,dy$$
$$= \iint_\Delta \left| -\frac{1}{2u} \right| du\,dv$$
$$= \frac{1}{2} \int_{1/2}^{2} \frac{du}{u} \cdot \int_{1/3}^{3} dv$$
$$= \frac{1}{2} \left[\ln u\right]_{1/2}^{2} \cdot \left[v\right]_{1/3}^{3}$$
$$= \frac{4}{3}\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{8}{3}\ln 2}$$

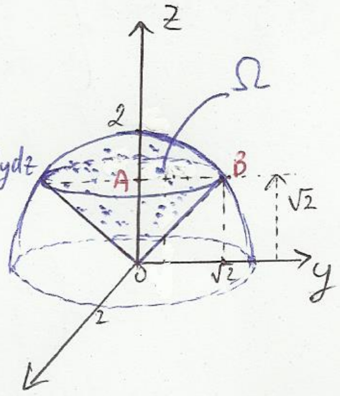
c)
$$K = \int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^1 \frac{\sin\pi x^2}{z+1}\,dz \right) dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left( \int_0^x \left( \sin\pi x^2 \left[\ln(z+1)\right]_0^1 \right) dy \right) dx$$
$$= \ln 2 \int_0^1 \left( \int_0^x dy \right) \sin\pi x^2\,dx$$
$$= \ln 2 \int_0^1 x \sin\pi x^2\,dx$$

$$K = \frac{\ln 2}{2\pi}\left[-\cos \pi x^2\right]_0^1$$

$$= -\frac{\ln 2}{2\pi}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = \boxed{\frac{\ln 2}{\pi}}$$

## Exercice 4:

a) $M = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = ?$




* intersection entre le cône et la sphère

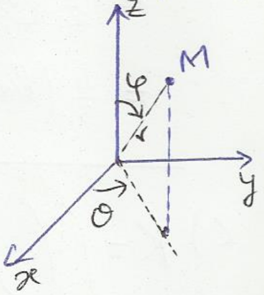
$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 = 4-x^2-y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

donc l'intersection est le cercle de centre $A(0,0,\sqrt{2})$ et de rayon $\sqrt{2} = AB$

* Passons aux coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$




Sur $\Omega$ ( région occupée par (S))

$$\begin{cases} \cdot\ \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ \cdot\ \varphi \text{ varie de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{4} = \widehat{AOB} \\ \cdot\ r \text{ varie de } 0 \text{ à } 2 = \text{rayon de la sphère} \end{cases}$$

La masse du solide (S) est donc

$$M = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$$

Jacobien

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^2 r^2 \cdot r^2\,dr\right)\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta$$

$$= \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \times \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2$$

$$= (2\pi)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\left(\frac{32}{5}\right)$$

$$= \boxed{\frac{64\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \text{ unités de masse}$$

c) ▪ Par symétrie : $x_G = y_G = 0$

▪ $z_G = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\, f(x,y,z)\,dxdydz = ?$

$$z_G = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^2 \underbrace{r\cos\varphi}_{z} \cdot \underbrace{r^2}_{f(x,y,z)} \cdot r^2\,dr\right)\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta$$

Jacobien

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^2 r^5\,dr$$

$$= \frac{1}{M}\left[\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{5}{64\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(2\pi)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{64}{6}\right)$$

$$= \frac{5}{12\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

En conclusion : $G\left(0,0,\frac{5}{12\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)$

## Exercice 5 :

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

2) $A^2 = 9I \Rightarrow A\left(\frac{1}{9}A\right) = I$

$\Rightarrow$ A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{9}A$

3) ▪ les 3 premières équations s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$ càd $AX = B$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Comme A est inversible, alors le sous-système formé par les 3 premières équations admet une solution unique donné par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}.B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

▪ Remplaçons dans la 4ième équat°:

$m + 0 - 1 = 3m + 1$

$\Leftrightarrow m = -1$

Conclusion :

* si $m \neq -1$ le système $(S_1)$ n'admet pas de solution (il est incompatible)

* si $m = -1$ alors $(S_1)$ admet une solution unique donnée par $(x, y, z) = (1, 0, -1)$

4) a) ▪ $M = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

· $MC = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

▪ Supposons que M est inversible. Alors $M^{-1}$ existe :

$MC = 0 \Rightarrow M^{-1}(MC) = M^{-1}.0$

$\Rightarrow I.C = 0$

$\Rightarrow C = 0$ : contradiction

Donc M n'est pas inversible

b) $(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (1) \\ -x + 2y - z = 0 & (2) \\ -x - y + 2z = 1/2 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 0x + 0y + 0z = 3/2$

$\Rightarrow 0 = \frac{3}{2}$ : impossible !

Donc $(S_2)$ est incompatible. Il n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.